Dvě mimoběžky $A_1, A_2, u, v \in \mathbb{R}^3$

$p: A_1 + s\cdot u$ $(s \in \mathbb{R})$ $\qquad q: A_2 + t\cdot v$ $(t \in \mathbb{R})$.

Vzdálenost p, q je rovna mezi dvěma body na p, resp. na q:

(Obecně: $\operatorname{dist}(X,Y) = \inf\{\operatorname{dist}(x,y) : x \in X, y \in Y\}$)

Je-li r přímka splňující:

$r \perp p \wedge r \perp q \wedge r \cap p \neq \emptyset, r \cap q \neq \emptyset$,

a $A \in r \cap p$, $B \in r \cap q$, potom

$\operatorname{dist}(p,q) = \|A - B\|$.

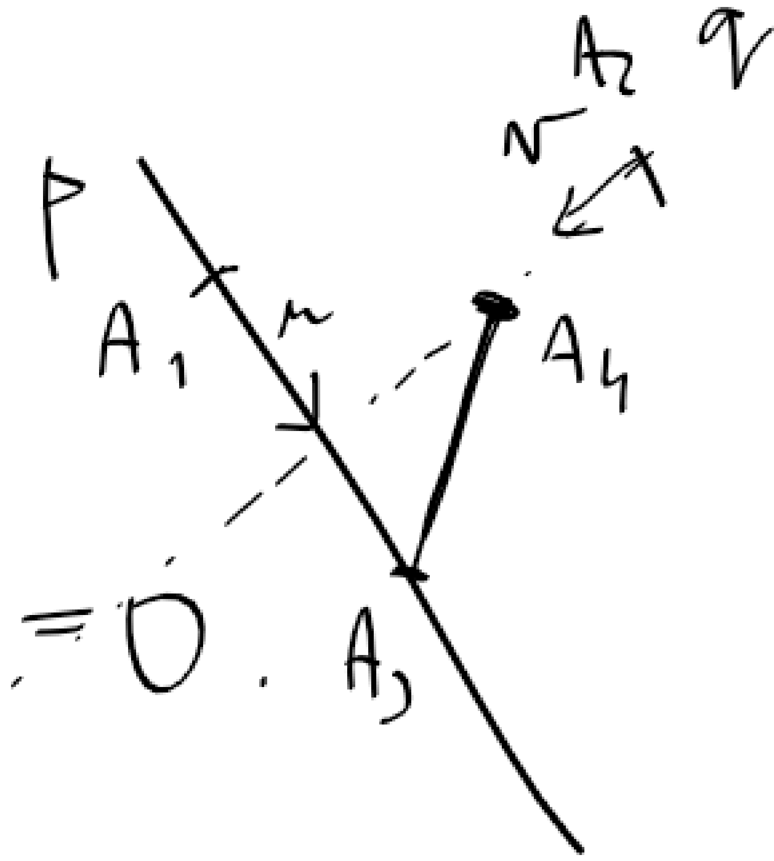
Stačí najít takovou r. Hledáme r ve tvaru

$r: A_3 + t\cdot w.$ $(t \in \mathbb{R})$

(Samozřejmě $u, v, w \neq 0$.)

Tj. chceme: $u \perp w$, $v \perp w$

BÚNO $A_3 \in p$, tj. $A_3 = A_1 + s\cdot u$ pro nějaké $s \in \mathbb{R}$.



Stačí si napsat rovnice

$\langle u, w\rangle = 0$, $\langle v, w\rangle = 0$.

$A_3 \in p \cap r$, $A_4 \in q \cap r$.

BÚNO $w = A_4 - A_3$. Tedy máme

$\langle u, A_4 - A_3\rangle = 0$ $\qquad \langle v, A_4 - A_3\rangle = 0$

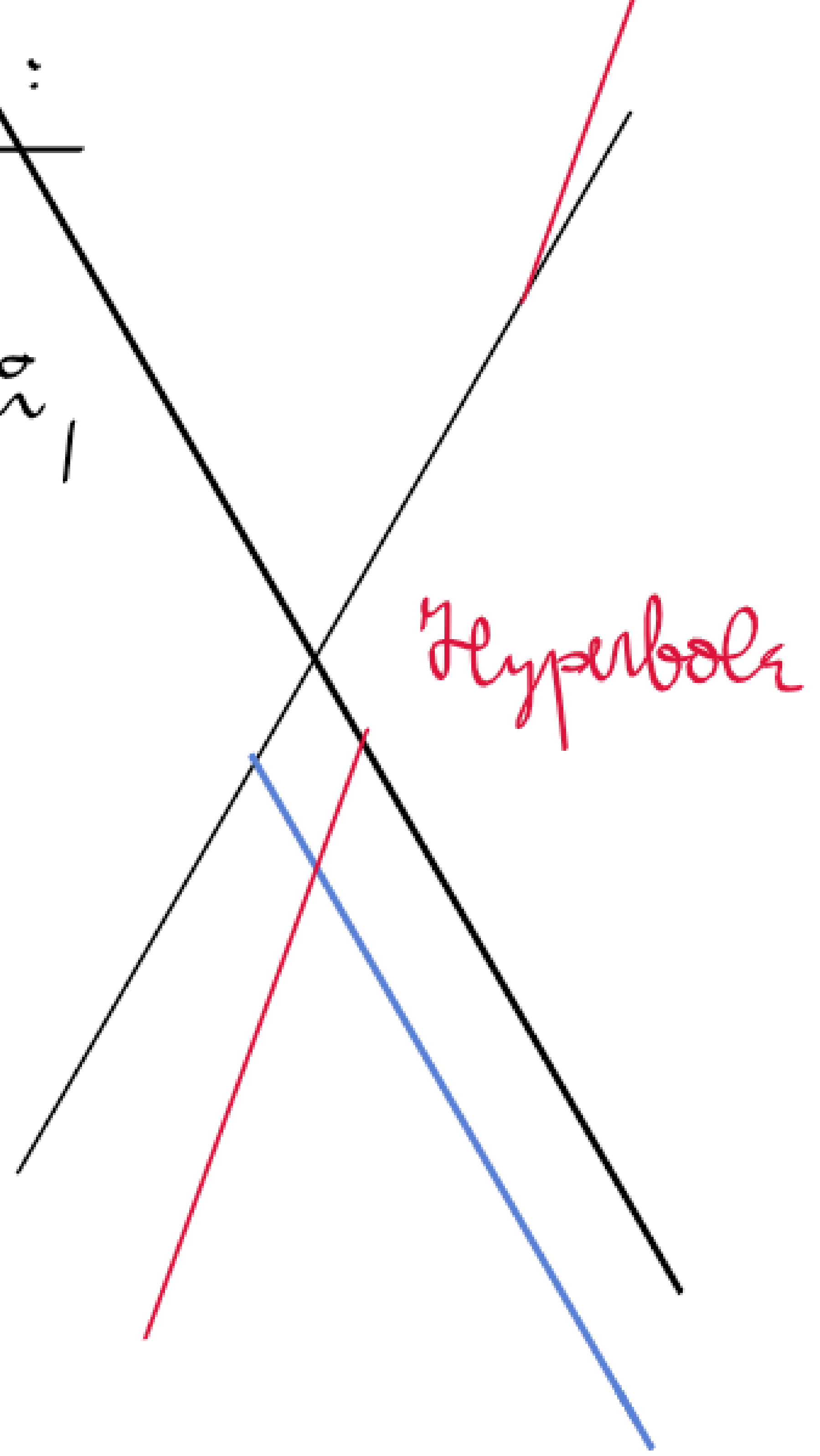
$A_4 = A_2 + t\cdot v$, $A_3 = A_1 + s\cdot u$, tj.

$A_4 - A_3 = A_2 - A_1 + t\, v - s\, u$.

Tj. máme 2 LR pro 2 neznámé s, t.

některé kuželosečky v $\mathbb{R}^2$:

Parabola: množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od jisté přímky $p \subseteq \mathbb{R}^2$ a jistého bodu $F \in \mathbb{R}^2 \setminus p$.



F ... je ohnisko paraboly

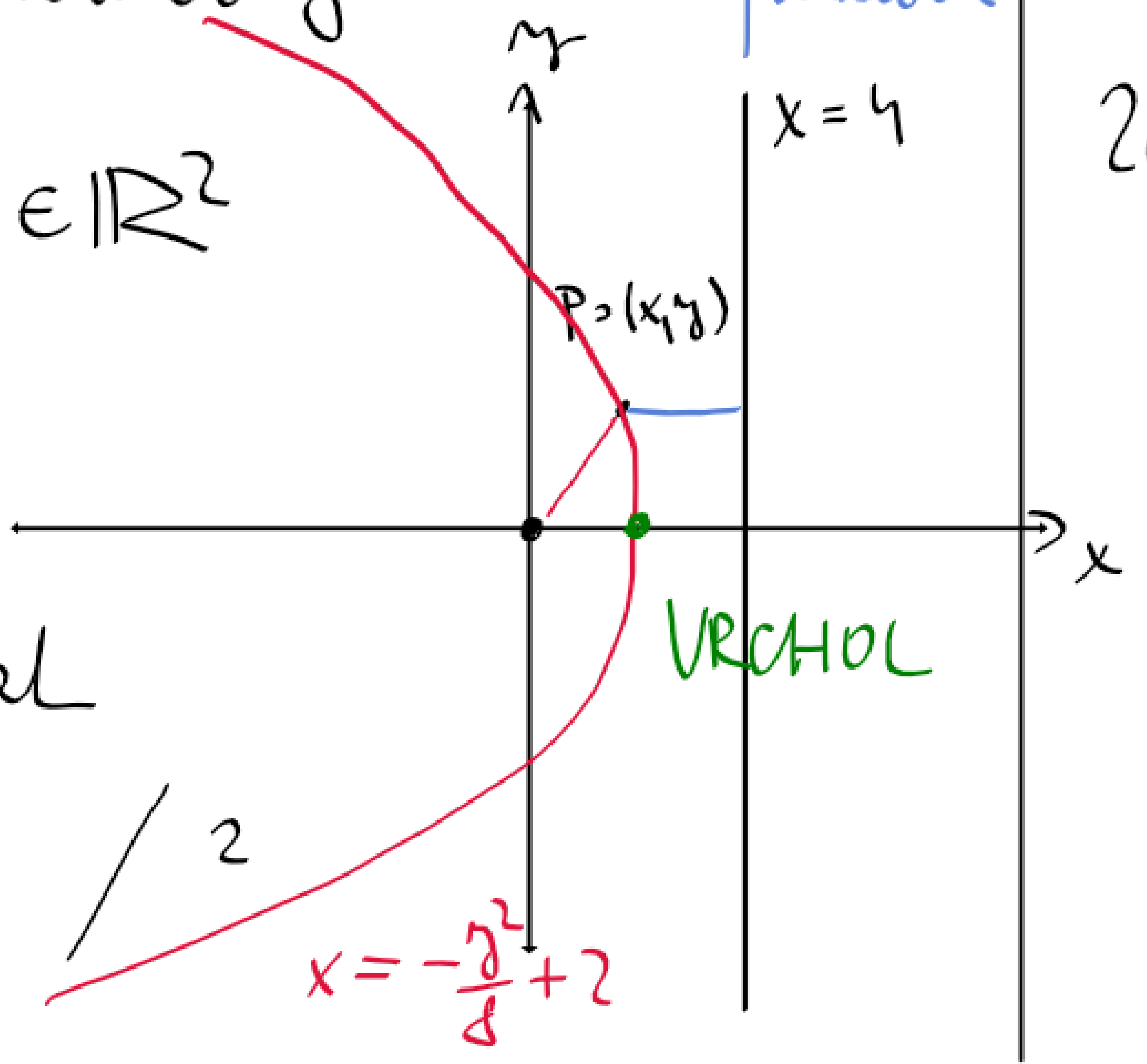
p ... řídicí přímka paraboly

Příklad: $F = 0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

$p: \ x = 4$

bod $P = (x,y)$ musí splňovat

$$\sqrt{x^2+y^2} = |x-4|$$



$$x^2 + y^2 = (x-4)^2$$

$$\cancel{x^2} + y^2 = \cancel{x^2} - 8x + 16$$

$$y^2 = -8x + 16$$

$$x = -\frac{y^2}{8} + 2$$

$4py = x^2$ | p...

Trik: Je daná parabola $y = ax^2 = \frac{x^2}{4p}$

Chceme určit ohnisko a řídicí přímku.

$$y' = 2ax$$

$$2ax = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

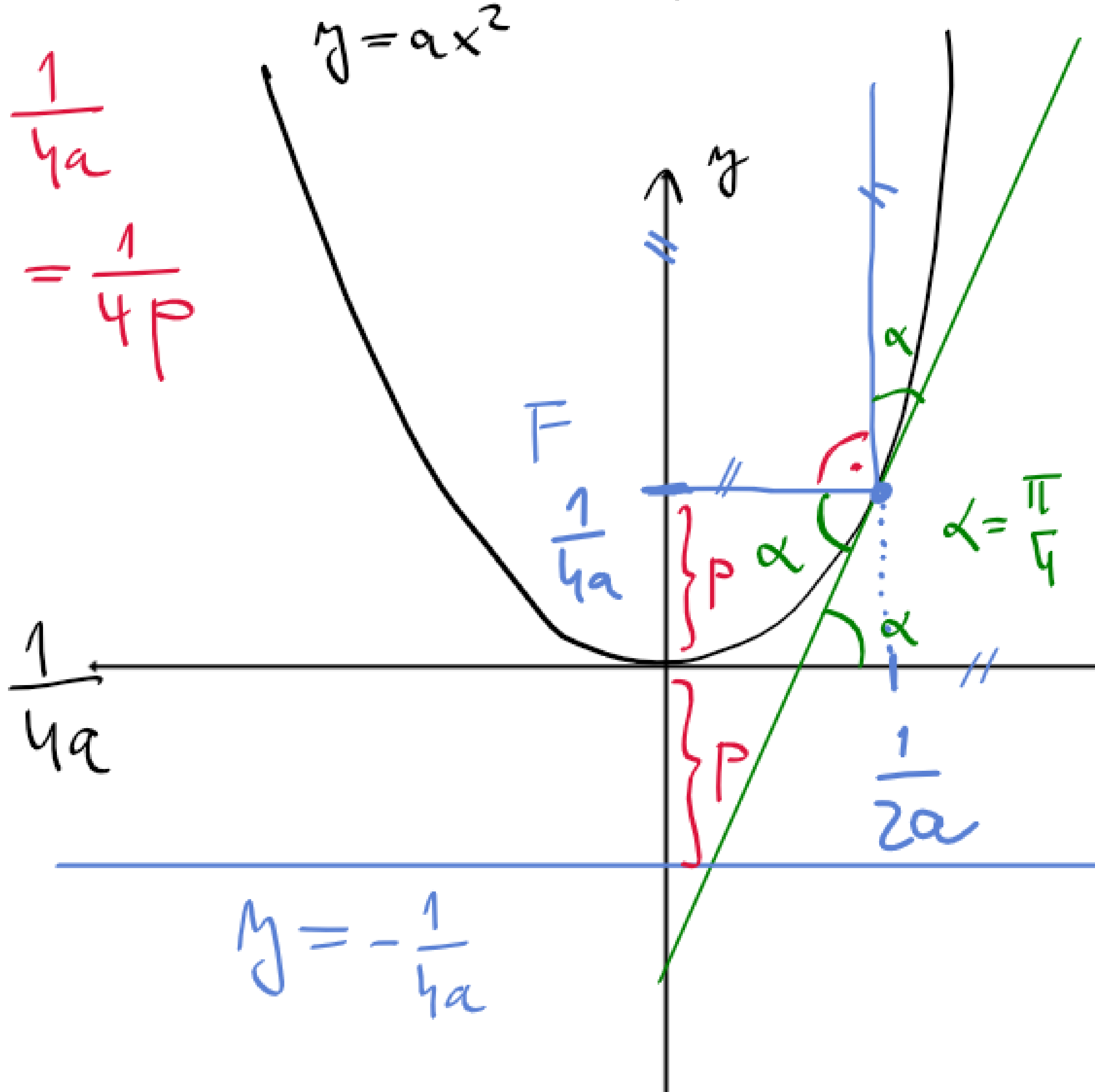
$$x = \frac{1}{2a}$$

$$y = ax^2 = \frac{a}{4a^2} = \frac{1}{4a}$$

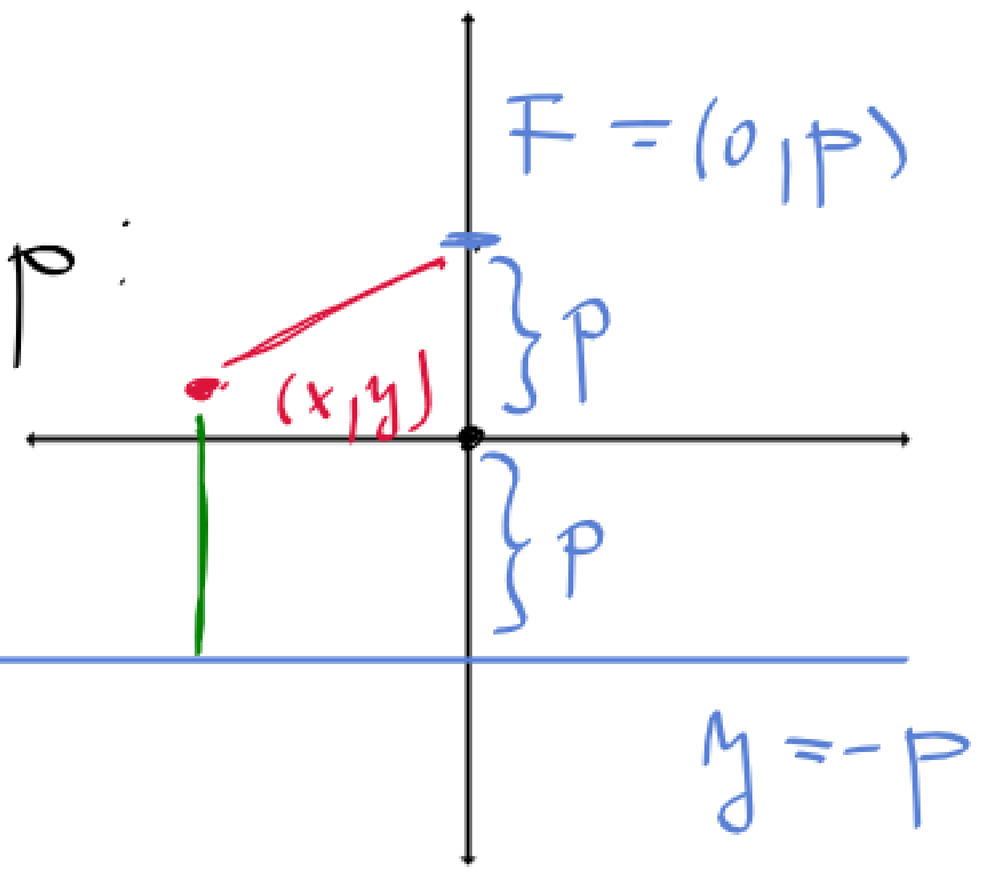
$$F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$$

$p = \frac{1}{4a}$

$a = \frac{1}{4p}$



Bez triku: najdeme rovnici paraboly příslušné F a $y=-p$:



$$\sqrt{x^2+(y-p)^2} = |y-(-p)| = y+p$$

$$x^2+(y-p)^2 = y^2+2py+p^2$$

$$x^2+\cancel{y^2}-2py+\cancel{p^2} = \cancel{y^2}+2py+\cancel{p^2}$$

$$[\ x^2 = 4py\ ]$$

Příklad: • ohnisko F paraboly

$$y^2 = 7x \qquad 7 = 4p$$

$$p = 7/4$$

$$F = [7/4, 0].$$

• **Parabola:** $(\overbrace{x-3}^{\tilde{x}})^2 = 16(\overbrace{y-1}^{\tilde{y}})$ $\qquad \tilde{O} = [3,1].$

$$4p = 16 \Rightarrow p = 4 \quad \not\Rightarrow \quad \cancel{F = [0,4]}$$

$V = [3,1]$ ... vrchol

$F = [3,1] + [0,4]$ ... ohnisko

$F = [3,5]$.

$$x^2-6x+9 = 16y-16$$

$x^2-6x-16y+25=0$ ... Pokud toto je zadání, musíme doplnit na 2. mo.

$$x^2-6x = \underbrace{(x-3)^2}_{x^2-6x+9} - 9$$

$$(x-3)^2-16y+25-9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 16y-16$$

$$(x-3)^2 = 16\cdot(y-1).$$

HYPERBOLICKÉ FUNKCE

Definice: • $\sinh x = \boxed{\mathrm{sh}\, x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$

$x \in \mathbb{R}$

• $\cosh x = \boxed{\mathrm{ch}\, x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$

• $\mathrm{tgh}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$, $\mathrm{cotgh}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$

Pozorování: • $\mathrm{sh}\, x$ je lichá funkce:

$\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}\, x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\mathrm{sh}\, x$$

• $\mathrm{ch}\, x$ je sudá funkce:

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\, x$$

• $\mathrm{sh}\, x + \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} =$

$$= \frac{2e^x \cancel{-e^{-x}} \cancel{+e^{-x}}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x.$$

Proto: sh … lichá část exponenciály

ch … sudá část …

Pro zajímavost: Eulerovy vzorce $(i = \sqrt{-1})$

$$\left[\, e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x \,\right]$$

lze snadno odvodit z Taylorových rozvojů exp., cos, sin.

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\boxed{\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x} \qquad \boxed{\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$z \in \mathbb{C}$: $e^z := \sum \frac{z^n}{n!}$ analogický vzorec.

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \quad \text{podle definice}$$

$$= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

cos

sin

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$+ i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) =$$

$$= \cos x + i \sin x.$$

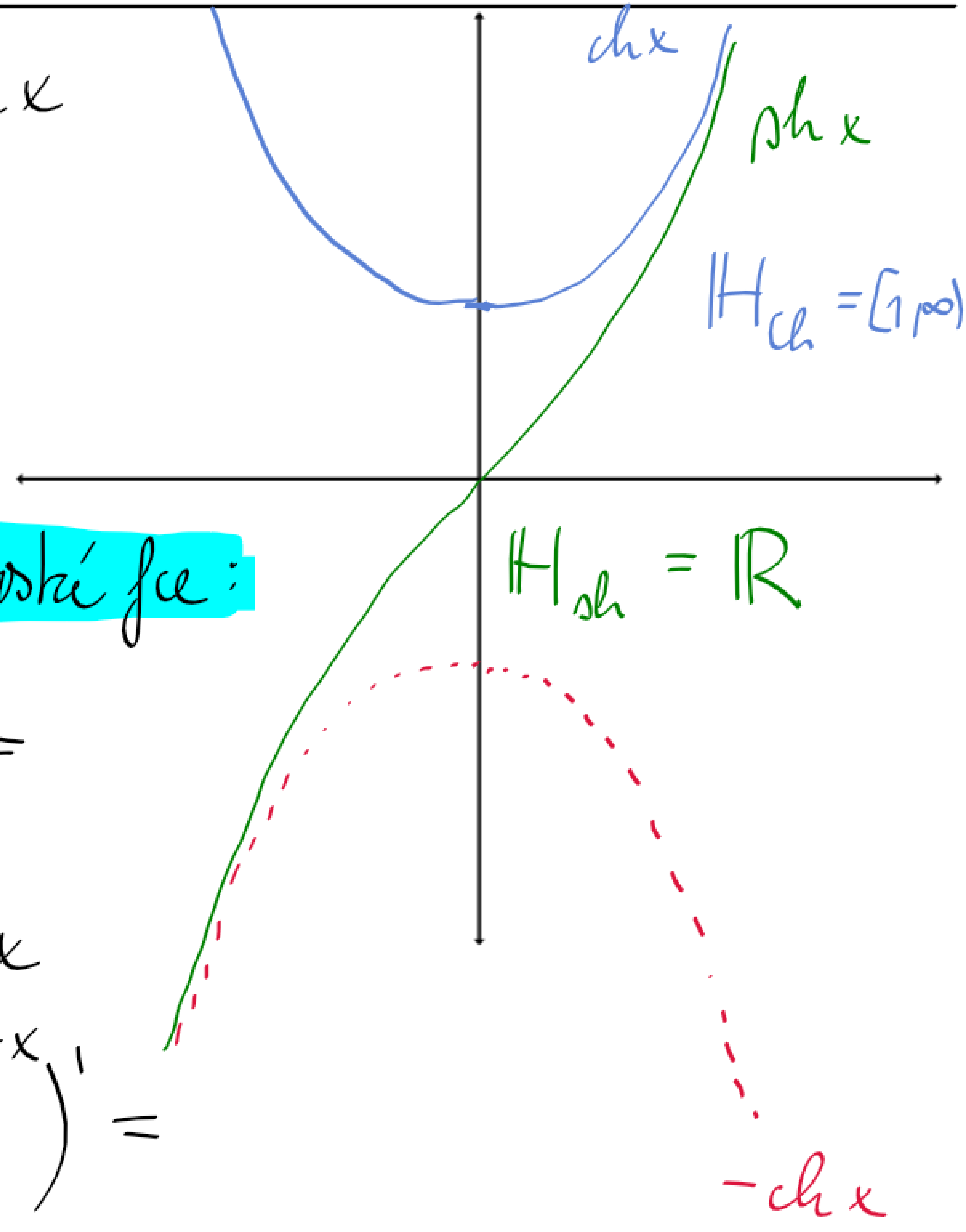
Celkem: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Toto není důkaz, protože musíme ověřit konvergenci všech zúčastněných řad a platnost úprav.

Zpět k $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$

$$\operatorname{ch} 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\operatorname{sh} 0 = \frac{1-1}{2} = 0$$



Zajímavé: $\operatorname{sh} x$ je prostá fce:

• $$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

• $$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Tedy $\forall x \in \mathbb{R}$ je $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \geq 1.$

Definujme $\operatorname{argsh} y := \operatorname{sh}^{-1} y$, tj.
argsh budiž inverzní fce k sh.

Chceme předpis pro argsh y.
Je-li dáno $y = \operatorname{sh} x$, naším cílem je „vypočítat x jako proměnnou y".

$y = \operatorname{sh} x$, tj. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad 2y = e^x - e^{-x}$

$2y e^x = e^{2x} - 1$ $\qquad e^{2x} - 2y e^x - 1 = 0$

SUBSTITUCE $a = e^x$: $\boxed{1} \cdot a^2 \boxed{-2y} a \boxed{-1} = 0$

$$a_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} =$$

$$= y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Všimněme si, že $\forall y \in \mathbb{R}: \sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y| \geq y$

Takže $y - \sqrt{y^2+1} < 0$.

Ale $a = e^x > 0$, a tedy $y - \sqrt{y^2+1}$ nepřichází v úvahu. Tedy nutně

$$e^x = a = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \; y \in \mathbb{R}.$$

$$y = \operatorname{sh} x \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

Tj. $\operatorname{argsh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$, $y \in \mathbb{R}$.

K ZAMYŠLENÍ: $[\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1]$
$\Rightarrow$ Param. hyperboly?

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow$ Param. kružnice